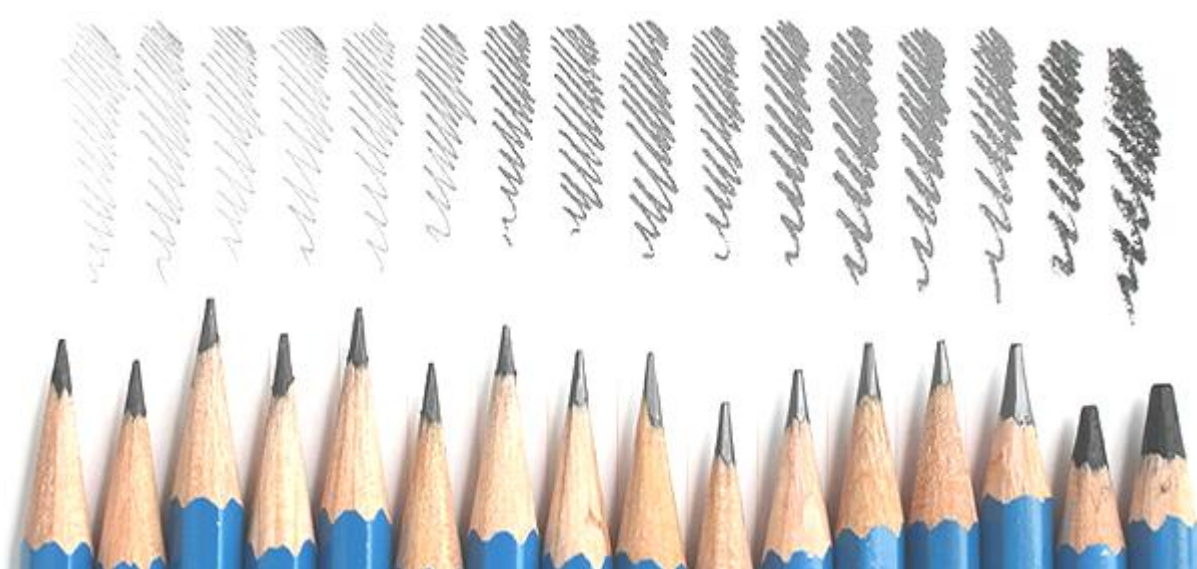


Scuola secondaria di Primo grado

Scrivere, leggere...

e far di conto



Spunti per riflettere

Andrea Gorini

www.andreagorini.it

Ringraziamenti

Questo documento raccoglie la comunicazione tenuta il 7 settembre 2012 nel convegno “I nuclei fondanti della scuola del primo ciclo” organizzato dall'[Associazione Il rischio educativo](#).

Pro manuscripto

Milano, ottobre 2018

Scrivere, leggere... e far di conto

1. Solo far di conto?

Vorrei aprire il mio contributo con un brano tratto da un commento ai risultati delle prove Invalsi svolte in seconda superiore nell'anno 2011:

«Dall'analisi delle risposte sembra emergere che le attività di calcolo siano viste dagli studenti in larga misura come semplice manipolazione simbolica fine a se stessa; tale manipolazione, non solo sembra essere condotta a livello puramente sintattico, ma addirittura sembra inibire qualunque capacità di controllo semantico. [...] Il calcolo simbolico, quindi, lungi dal generalizzare le proprietà dei numeri, sembra essere visto, paradossalmente, come un campo di esperienza sintattica recintato e non comunicante con gli oggetti numerici. In altri termini non sembra che gli studenti siano in grado di usare l'algebra come strumento di pensiero».¹

Questo giudizio è espresso a fronte di una prova nazionale svolta dai ragazzi italiani dopo dieci anni di scuola, un risultato sconcertante, ma che di contro mette subito in luce quale sia il tema di cui ci vogliamo occupare. Troppo a lungo nell'insegnamento della matematica si è insistito sugli aspetti procedurali di calcolo, enfatizzando eccessivamente la loro portata, soprattutto identificandoli come l'aspetto più rilevante della disciplina. È fuor di dubbio nella matematica sia importante l'aspetto del calcolo, che permette di procedere più speditamente con la sicurezza di poggiare su un metodo che produce risultati affidabili, ma esso non può essere considerato l'unico.

Per convincersene consideriamo queste tre diverse situazioni:

- In una confezione ci sono 459 perline. Per comporre una collana occorre infilare 54 perline. Quante collane si possono comporre?
- Si sono iscritti 459 tifosi per seguire la squadra in trasferta. Quanti pullman da 54 posti servono per il trasporto?
- Una pezza di stoffa lunga 459 cm va divisa in 54 strisce con cui confezionare i numeri di gara per i partecipanti ad un torneo. Quanto misura ogni striscia?²

¹ M. Impedovo, A. Orlandoni, D. Paola, *Quaderni SNV N 1 MAT a.s. 2010 2011 – Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica – Classe seconda – Scuola secondaria di secondo grado*, p. 3

È interessante notare che in un articolo di Pier Luigi Ferrari, *Abstraction in mathematics*, del 2003, vengono segnalate difficoltà analoghe a quelle riscontrate nel testo citato

² Esempi tratti da A. Gorini, *Matematica a sorpresa, Aritmetica 1*, Principato, Milano 2011, p. 102

Per trovare ciascuna delle risposte occorre svolgere una divisione, ma ciò non è sufficiente. Nel caso delle collane si ha

$$459 : 54 = 8 \text{ con il resto di } 27$$

in base alla quale possiamo concludere che si possono comporre 8 collane. Le perline restanti possono servire per un'altra collana solo se si riescono a recuperare altre perline.

Nel caso dei tifosi per trovare quanti pullman servono c'è bisogno ancora della divisione:

$$459 : 54 = 8 \text{ con resto di } 27.$$

Possiamo concludere che servono 8 pullman? Naturalmente no, altrimenti 27 tifosi resterebbero a piedi. Occorrono 9 pullman per trasportare tutti quanti.

La terza situazione richiede ancora la stessa divisione, in questo caso però poiché si tratta di misure si può prendere in considerazione un risultato non intero:

$$459 : 54 = 8,5$$

È sufficiente avere a disposizione una riga graduata con la precisione al millimetro per utilizzare questo risultato con la massima precisione.

Questi esempi mostrano quanto sia significativo ciò che eccede il calcolo, anzi possiamo affermare che la parte più significativa del ragionamento che ci ha condotto alle conclusioni sia ciò che eccede il calcolo: battere i tasti di una calcolatrice per ricavare il risultato della divisione e limitarsi a leggere sul display il numero ottenuto conduce all'errore in due casi su tre.

Nel testo *Da dove viene la matematica* di G. Lakoff e R. Nunez p.123 troviamo un interessante analisi in proposito:

«Usando gli algoritmi, possiamo manipolare correttamente i numerali [le scritture dei numeri nella forma posizionale decimale] senza aver contatto con i numeri e senza necessariamente sapere molto sui numeri come contrapposti ai numerali. Gli algoritmi sono stati creati esplicitamente per avere calcoli efficienti, non per la comprensione, e noi possiamo sapere come si usano gli algoritmi, senza capire molto di ciò che essi significano. Quando impariamo le procedure per sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere, apprendiamo algoritmi per manipolare simboli, che sono i numerali, non i numeri. Ciò che viene insegnato come aritmetica nella scuola elementare consiste per la maggior parte, non in idee sui numeri, ma in procedure automatiche per svolgere operazioni sui numerali, procedure che forniscono risultati stabili e consistenti. Essere capaci di portare a termine queste operazioni non

significa che si sono imparati contenuti significativi sulla natura dei numeri, anche se si ottengono sempre risultati corretti!

La cosa importante da notare è che tali algoritmi minimizzano l'attività cognitiva, permettendo di ottenere risposte corrette. Inoltre, questi algoritmi funzionano in generale per tutti i numeri, a prescindere dalla loro grandezza. E una delle caratteristiche migliori dei calcoli matematici, estesi dalla semplice aritmetica fino alle forme più elevate della matematica, è che l'algoritmo, essendo svincolato da significato e comprensione, può essere implementato in una macchina concreta chiamata computer, che può calcolare perfettamente ogni cosa senza capire assolutamente nulla»³.

Vale la pena ribadire che gli aspetti algoritmici sono una parte importante della matematica ed è importante anche la capacità di applicarli in maniera corretta: non è affatto da sottovalutare l'abilità di condurre a termine senza errori, con puntuale precisione una serie di istruzioni, come può essere il calcolo di un'espressione numerica o algebrica, basti pensare all'importanza di seguire scrupolosamente i protocolli di sicurezza nel trattare sostanze velenose o seguire lavorazioni particolarmente pericolose.

Ma identificare la matematica solo con questo aspetto è come guardare un orologio dalla parte degli ingranaggi e non del quadrante, non si può capire il senso di ciò che si sta guardando.

È interessante notare che in tutti i documenti elaborati nei processi di riforma della scuola del primo ciclo l'idea che la matematica non sia riducibile al calcolo viene continuamente sottolineata e fatta propria anche nel quadro di riferimento Invalsi, in cui si legge: «Si vuole in primo luogo valutare la conoscenza della disciplina matematica e dei suoi strumenti, intendendo tale disciplina come **conoscenza concettuale**, frutto cioè di interiorizzazione dell'esperienza e di riflessione critica, non di addestramento "meccanico" o di apprendimento mnemonico. Una conoscenza concettuale quindi, che affondi le sue radici in **contesti critici di razionalizzazione della realtà**, senza richiedere eccessi di astrazione e di formalismo. La formalizzazione matematica dovrebbe infatti essere acquisita a partire dalla sua necessità ed efficacia nell'esprimere ed usare il pensiero matematico. Gli aspetti algoritmici applicativi ed esecutivi, che pure costituiscono una componente irrinunciabile della disciplina matematica, non dovrebbero essere considerati fine a se stessi»⁴.

³ G. Lakoff, R. Nunez, *Da dove viene la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino 2005, p. 123

⁴ Quadro di riferimento Invalsi, p. 2, disponibile sul sito www.invalsi.it

2. Che cos'è la matematica

Se la matematica non è 'fare i calcoli' allora che cos'è? Che cosa sia la matematica è una questione che si trascina grossomodo da più di due millenni e che nel tempo, a fronte dell'evoluzione e degli sviluppi della disciplina, ha dato vita a diverse definizioni.

Se andiamo alla ricerca delle definizioni che nella storia sono state date di 'Matematica' o anche solo delle sue caratteristiche, ne troveremo così tante da pensare che la sua essenza sia ineffabile, H. Freudenthal apre il suo testo *Ripensando l'educazione matematica* dedicato alla matematica e al suo insegnamento proprio ponendosi la stessa domanda e cercando la risposta nell'etimologia del termine che indica tale disciplina in olandese, che possiamo intendere come 'Arte del certo'.

«La caratteristica principale della matematica è la certezza. [...] La matematica cerca e chiede le ragioni, come ogni altra scienza e forse cerca delle ragioni migliori di ogni altra scienza. La necessità della certezza nella scienza non viene soddisfatta con l'accettazione delle cose come garantite: la certezza deve essere cercata e garantita, ed in matematica ciò si ottiene con un'attività mentale del tutto particolare. Ed è **questa attività mentale**, piuttosto che i contenuti, **che caratterizza la matematica** come il campo in cui essa può essere esercitata nel modo più adeguato ed efficiente»⁵.

Questa attestazione ci suggerisce di pensare alla matematica come una **forma di conoscenza** fondata su un metodo che ha come punto di forza la capacità di fornire affermazioni certe. Freudenthal nello sviluppo del suo pensiero tocca un altro punto importante, si chiede da dove abbia origine la matematica e la risposta può risultare sorprendente: **il senso comune**.

«L'esempio più chiaro di matematica basata sul senso comune è fornito, naturalmente, dai numeri interi. [...] I bambini acquisiscono il numero nel corso del loro sviluppo mentale e fisico, il che rende molto difficile per i ricercatori il trovare come ciò avvenga nei dettagli. L'acquisizione del numero è fortemente aiutata (se non addirittura resa possibile) dai corrispondenti termini del linguaggio comune [...] la morfologia dei numeri recitati è il primo algoritmo di tipo matematico che il bambino acquisisce; un algoritmo che appartiene al senso comune, acquisito mediante i mezzi del linguaggio comune»⁶.

Significativa a tale riguardo è la tesi di K. Devlin, un matematico americano contemporaneo; nel suo testo *Il gene della matematica* asserisce: «La mia argomentazione è in tutta semplicità

⁵ H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, Editrice La scuola, Brescia 1994, p. 22

⁶ *Ibidem*, p. 27

questa: la vostra predisposizione per il linguaggio è esattamente ciò che vi serve per fare della matematica»⁷; in altri termini a nessuno è precluso l'apprendimento della matematica, tanta o poca che sia.

Eppure nell'opinione comune la matematica è considerata più lontana di ogni altra cosa dal senso comune, una conoscenza solo per iniziati, racchiusa in formule astruse scritte con una notazione inaccessibile. Sicuramente questa opinione può essere indotta aprendo un qualunque testo di matematica di livello universitario: poche frasi in linguaggio naturale che si riferiscono ad oggetti astratti seguite da pagine e pagine in cui i simboli prevalgono sulle parole. La matematica che c'è sui libri è il risultato dell'attività di tanti uomini impegnati nella ricerca della conoscenza, un'immensa costruzione come quella di una cattedrale cui hanno contribuito tanti costruttori. Fermarsi a considerare solo i teoremi in sé, i risultati in sé, avulsi e separati dalla loro genesi è come guardare il duomo di Milano contemplando uno dopo l'altro i suoi blocchi di marmo: l'impressione che se ne ricava è l'impatto con qualcosa di bello, perfetto e prezioso, ma anche freddo, muto, statico, inaccessibile e immutabile. (Non sono forse i tratti che nel luogo comune si riservano alla matematica, che è sicuramente importante e significativa, ma è percepita come fredda, pesante e inerte?). Osservando singolarmente i blocchi di marmo della cattedrale non se ne può avere una visione complessiva e non si può accedere al significato, capace di colpire l'intelligenza. E non si possono nemmeno intravedere quali sono stati i processi che hanno portato alla sua costruzione.

Il legame tra matematica e senso comune è molto profondo e complesso; seguiamo ancora il pensiero di Freudenthal: «Il senso comune, per diventare genuina matematica e per progredire, ha dovuto essere sistemato e organizzato. Le esperienze del senso comune si coagularono in leggi (come la commutatività dell'addizione), e **queste leggi diventarono nuovo senso comune, di ordine superiore**, e diventarono una base per una matematica di ordine superiore; una gerarchia formidabile, costruita grazie ad una straordinaria collaborazione di forze»⁸, e poco oltre, ribadisce: «Riflettendo sulla propria attività, l'uomo scopre i paradigmi, che sono astratti in procedure di azione mentale, e diventano coscienti come schemi dai quali il pensiero è organizzato in vista di nuovi progressi... Questi ultimi, a loro volta, diventano dei contenuti, un nucleo di contenuti di ordine superiore: si ha di nuovo la ripetizione di un processo, **un collegamento reciproco di forma e contenuto**, che caratterizza il pensiero matematico. Questo collegamento **include l'espressione linguistica**,

⁷ K. Devlin, *Il gene della matematica*, Longanesi, Milano 2002, p. 9

⁸ H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, Editrice La scuola, Brescia 1994, p. 31

nella quale la matematica è comunicata come un prodotto e una procedura. I nuovi contenuti e la nuova forma richiedono una nuova terminologia, la quale, per essere efficiente, deve essere rettificata e semplificata, sotto i due aspetti di **simbolo** e **notazione**»⁹.

3. Come si apprende la matematica?

La base per progredire in matematica è la sistematizzazione e l'organizzazione delle attività e delle conoscenze che sono già presenti nell'orizzonte dell'esperienza personale, secondo una strada che l'alunno che impara deve percorrere personalmente. Ancora Freudenthal ci conduce:

«Quale che sia l'importanza dei contenuti e delle abilità, essa è molto minore nella matematica che nelle altre materie. Poiché ho presentato insistentemente la matematica come un'attività la risposta alla domanda: "Qual è la meta?" sarà: "Un'attività". In altre parole, il discente deve reinventare il fare matematica piuttosto che la matematica; l'azione di astrarre piuttosto che le astrazioni; il formalizzare piuttosto che costruire delle formule; il costruire algoritmi piuttosto che gli algoritmi; il parlare piuttosto che il linguaggio; [...] Se il discente viene guidato a reinventare tutte queste cose, allora le conoscenze e le abilità verranno apprese più facilmente, e più facilmente saranno ritenute e applicate».¹⁰

La riflessione ad opera dell'alunno, guidata dall'insegnante, sulla propria esperienza dà origine alla sistematizzazione e all'organizzazione che gli permette di saltare da un livello ad un livello più alto in maniera naturale e non di «essere sollevato dall'insegnante»¹¹, mette l'allievo nella condizione di ricostruire in sé, un po' alla volta, i sistemi concettuali e procedurali della matematica. L'alternativa a questo maturare, lento o veloce a seconda delle caratteristiche personali di ciascuno, è l'insegnamento per imposizione, è rovesciare nella mente dei discenti concetti e procedure, che possono anche essere acquisiti e utilizzati in maniera corretta, ma che non possono che restare «nella mente come un peso portato dall'esterno»¹². Vale la pena osservare che queste due diverse visioni dell'insegnamento presuppongono due diverse concezioni del discente, che in un caso viene riconosciuto come un soggetto con ragione e libertà e nell'altro come terminale di un processo.

⁹ *Ibidem*, p. 36

¹⁰ *Ibidem*, p. 76

¹¹ Cfr. H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, Editrice La scuola, Brescia 1994, p. 33

¹² Cfr. P. Florenskij, *Non dimenticatemi*, Mondadori, Milano 2000, p. 67 s

Nel testo *Lezione e lectio* Florenskij mette bene in luce che cosa significhi far lezione, ovvero a che cosa deve mirare l'intervento di un insegnante per sollecitare positivamente i propri allievi: «[...] l'essenza della lezione è la vita scientifica in senso proprio, è riflettere insieme agli uditori sugli oggetti della scienza, e non consiste nel tirar fuori dai depositi di un'erudizione astratta delle conclusioni già pronte, in formule stereotipate. La lezione è iniziare gli ascoltatori al processo del lavoro scientifico, è introdurli alla creazione scientifica – l'atto di pensiero con cui una persona sviluppa un concetto che prima non possedeva è un atto creativo –, è un modo per insegnare attraverso l'evidenza e addirittura sperimentalmente un metodo di lavoro; non è la semplice trasmissione delle *verità* della scienza nella sua fase *attuale, contemporanea*». ¹³

4. Dal concreto all'astratto

Se la generazione dei concetti matematici avviene a partire dal senso comune, dall'esperienza diventa importante cercare di far luce sulla dinamica che favorisce lo sviluppo dell'astrazione a partire da situazioni concrete. Consideriamo l'esempio della geometria, seguendo le parole del prof. C. F. Manara: «La geometria è razionalizzazione di quelle nostre esperienze sensoriali che indichiamo genericamente come *esperienza spaziale* e anche *esperienza di movimento*. [...] Da queste osservazioni elementari, spesso mescolate tra loro, ancora indistinte e confuse, nasce la *geometria*, considerata come un *atteggiamento attivo e razionale* mirante a *descrivere in modo preciso e coerente* gli oggetti e l'ambiente che li contiene e li circonda, nonché a spiegare certe relazioni degli oggetti tra loro e con il soggetto. [...] Per giungere ad una descrizione razionale occorre che il soggetto sia in grado di passare da una osservazione soggettiva ad una che potremo chiamare 'intersoggettiva' [...] L'ideale che ci si pone è giungere ad una descrizione degli oggetti o dell'ambiente tali da renderli riconoscibili per ogni osservatore: ciò si può ottenere qualora si giunga a formulare una definizione logica e razionale dell'oggetto in questione». ¹⁴

I modi che la mente utilizza per giungere a questa descrizione oggettiva sono l'**astrazione**, prescindere da alcune qualità degli oggetti e spingerne al massimo la valutazione delle altre che vengono invece considerate, e la **generalizzazione**, che si realizza ad esempio spingendo

¹³ P. Florenskij, *Lezione e lectio*, La nuova Europa, 4 2010, p. 11

¹⁴ C. F. Manara, *L'insegnamento della matematica*, Editrice La Scuola, Brescia 1993

con l'immaginazione l'idea degli oggetti che abbiamo elaborato oltre i vincoli imposti dalla realtà fisica.

Occorre però procedere con attenzione nel percorso concreto astratto. Scrive la prof. Longo: « Il risultato di molte esperienze didattiche che fanno ampio uso di materiali concreti non sembra sempre adeguato alle attese. I bambini si divertono a disegnare, a manipolare oggetti e a giocare ma, per usare i termini di Lucio Russo, 'i bastoncini restano bastoncini e non diventano segmenti', cioè non si riscontra il passaggio alla conoscenza del pensiero matematico»¹⁵.

È bene ricordare che gli oggetti della matematica sono molto particolari, appartengono ad un alto livello di astrazione, nel quale è venuto meno ogni legame con il modo reale, con la situazione o meglio il complesso delle situazioni che ne hanno dato origine: un quadrato è un concetto che può essere richiamato, rappresentato da una figura tracciata su un foglio o su uno schermo, ma non può essere in nessun modo identificato con una sua precisissima immagine.

Il passaggio dal concreto all'astratto non avviene in modo meccanico, ma va sollecitato attraverso opportune domande e richieste sulla situazione concreta che si sta analizzando in modo da favorire da parte degli alunni di una maggiore consapevolezza di ciò che sta accadendo sotto i loro occhi. Supponiamo di avere a disposizione delle matite di diversa lunghezza: è possibile disporle sulla superficie del banco e verificare che in alcuni casi possono formare il perimetro di poligoni e in altri no, ma la semplice osservazione non conduce automaticamente alla definizione di poligono o alla disuguaglianza triangolare.

In questo processo inoltre è fondamentale il ruolo del linguaggio. Scriva ancora la prof. Longo: «L'osservazione didattica nega che l'accesso all'astrazione sia un processo autonomo legato soprattutto alla crescita e al naturale sviluppo del pensiero. Alcune osservazioni, compiute nella scuola negli ultimi anni, mi conducono ad affermare l'utilità di un continuo scambio tra i due livelli (concreto e astratto) e l'opportunità, per costruire il pensiero matematico, di abbandonare talvolta il ricorso a esperienze e modelli concreti **sostituendoli con considerazioni sul linguaggio e sul significato**, pur di fornire ai bambini «ragioni effettive e credibili» per gli oggetti matematici che stanno elaborando. [...] È certo comunque che la continuità tra scuola primaria e secondaria di primo grado può essere impostata in modo conveniente riferendosi a tale dinamica piuttosto che legandola a una successione lineare di

¹⁵ A. P. Longo, *L'esperienza nella formazione del pensiero matematico*, Emmequattro n. 45

contenuti. Occorre infatti riprendere gli argomenti già introdotti nella scuola primaria non come un ripasso, ma trattandoli da un punto di vista più astratto, sia precisando la loro natura che passando consapevolmente a un linguaggio più formalizzato». ¹⁶

5. Il linguaggio e la matematica

Complessi e profondi sono gli intrecci tra la matematica e il linguaggio. Quando si fa matematica si usa il linguaggio comune, le osservazioni, le descrizioni, i tentativi di spiegazione, le congetture, le discussioni che possono avvenire in classe sono espressi nei termini del linguaggio comune; molti contenuti della matematica possono essere espressi in linguaggio comune.

Il riferire il proprio pensiero sia oralmente sia nella produzione di un testo scritto avviene nel linguaggio comune, è il veicolo di senso che abbiamo a disposizione, anche quando esso riguarda oggetti che non sono comuni come quelli matematici. È opportuno non sottovalutare la possibilità di richiedere la produzione di testi (solo o prevalentemente in linguaggio comune) a contenuto matematico, come possono essere la relazione di un'esperienza di tipo matematico o la soluzione di un problema: essi infatti sono occasioni privilegiate per osservare come gli allievi riescono singolarmente a rendere ragione dei processi di pensiero che hanno messo in atto.

Significativo a questo riguardo il commento del prof. Bolondi sugli esiti delle prove scritte del liceo scientifico nell'esame di stato del 2010: « I compiti di italiano ci dicono che i ragazzi non riescono a usare la lingua italiana per collegare, saldare, ordinare le idee e le esperienze; con una dinamica assolutamente parallela, i compiti di matematica ci dicono che non riescono a usare il linguaggio matematico (e il linguaggio naturale) per collegare, ordinare le informazioni e i risultati parziali, costruire una argomentazione; verificare i propri risultati. Impiegano casualmente connettivi e quantificatori, non utilizzano mai esempi o controesempi a sostegno delle proprie argomentazioni, fanno raramente asserzioni dichiarative riguardo al proprio lavoro, non rispondono esplicitamente alle consegne poste ma delegano ai calcoli la risposta. [...] Anche la produzione di un testo matematico (anche di un testo prevalentemente simbolico) interagisce con i processi di apprendimento e con la comprensione. L'acquisizione di una adeguata capacità di comunicazione, e con essa l'utilizzo di diversi registri di mediazione, è parte integrante dell'apprendimento della matematica.

¹⁶ *Ibidem*

Come per l'italiano, le carenze individuate dal lavoro dell'Invalsi non sembrano solo dovute a superficialità, ignoranza spicciola o appiattimento sulle specifiche di nuovi mezzi di comunicazione: mettono invece in luce una difficoltà trasversale di organizzazione del pensiero, comune al discorso linguistico e a quello matematico»¹⁷.

Oltre agli aspetti legati al linguaggio comune, in matematica, come in ogni altro settore disciplinare, esiste un linguaggio specifico, legato anche alla necessità di dare un nome ai nuovi oggetti che si inventano e alle relazioni che si scoprono tra essi. Raccogliamo alcune considerazioni legate al lessico osservando alcuni casi: prendiamo in esame il termine **diagonale**, con esso si indica in un poligono un segmento che unisce due vertici non consecutivi, tale termine si usa pressoché esclusivamente all'interno della disciplina. Ci sono altri termini invece che vengono mutuati dalla lingua naturale e vengono utilizzati con significato diverso o parzialmente diverso: consideriamo ad esempio il termine **potenza**, il suo significato matematico ha poco a che vedere con il significato nel linguaggio naturale, pur richiamandolo in maniera evocativa. Diverso è il caso invece di una parola come **altezza**: nel linguaggio naturale ha un significato che viene in qualche misura fatto proprio dal significato specifico, ma che viene anche ristretto e condizionato, perdendo i riferimenti spaziali usuali: in un triangolo ad esempio l'altezza, una altezza, è la lunghezza del segmento perpendicolare ad un lato compreso tra esso o il suo prolungamento e il vertice opposto, non c'è più alcun riferimento all'estensione in direzione verticale. L'introduzione dei termini specifici ha bisogno che per gli allievi esistano già i concetti che tali termini vengono indicati, in più la definizione delle accezioni specifiche di parole del linguaggio comune ha bisogno che il nuovo significato sia distinto da quello precedente, sono in ogni caso dei punti di arrivo di un percorso piuttosto che punti di partenza; in genere il riconoscimento di un concetto, la capacità di realizzarne una rappresentazione di un concetto, come fornire un esempio, precedono la capacità di fornire o utilizzare correttamente una definizione verbale ben costruita. Partire dalla definizione può significare per i ragazzi non parlare di nulla o peggio ancora può causare di errori e incomprensioni¹⁸.

¹⁷ G. Bolondi, *Invalsi: l'italiano manda in crisi anche la matematica*, www.ilsussidiario.net, 2 aprile 2012

¹⁸ Cfr. E. Rigotti, *Conoscenza e significato*, Mondadori università, Milano 2009, p. 31 Linguaggio ordinario e linguaggio scientifico

6. Il linguaggio simbolico

Occorre considerare che la matematica, negli aspetti che riguardano il linguaggio, è diverso dagli altri linguaggi. Così ne parla Feynman:

«La cosa strana della fisica è che anche per formulare le leggi fondamentali abbiamo bisogno della matematica. [...] Più investighiamo, più leggi troviamo, più profondamente penetriamo la natura, più la malattia persiste: ognuna delle nostre leggi è un'affermazione puramente matematica. [...] Voi mi potreste dire: 'Perché non dirla a parole invece che a simboli? La matematica è solo un linguaggio, e noi vogliamo poterlo tradurre'. [...] Ma io non credo che sia possibile, perché la matematica non è semplicemente un'altra lingua. La matematica è un linguaggio più il ragionamento; un linguaggio più la logica, cioè uno strumento per ragionare. In effetti è una grande raccolta dei risultati dell'attento ragionamento di varie persone. Per mezzo di essa è possibile collegare un'affermazione a un'altra»¹⁹.

Se vogliamo perciò che la matematica sia appresa, e apprezzata, non ci sono scorciatoie, occorre curare che gli alunni sviluppino le idee e i concetti che vengono espressi dal linguaggio matematico e in particolare dalle sue forme simboliche.

Vale la pena osservare che i ritrovamenti delle iscrizioni ad opera degli archeologi nell'area dell'Iran mostrano che l'uso dei simboli per indicare i numeri precede la nascita della scrittura: «La scrittura non inizia dunque con la rappresentazione grafica degli oggetti della transizione – siano giare o capre – ma dalla loro quantità. La registrazione della quantità ha comportato la raffigurazione dei numeri con delle cifre. [...] Nella scrittura dei numeri, la prima operazione è quella di pensare un numero, la seconda quello di rappresentare tale numero attraverso un *calculus*. Dal momento in cui i prodotti dell'attività mentale si resero visibili – i numeri attraverso i *calculi* –, la scrittura, duplicando questa prima rappresentazione nei segni, ebbe inizio»²⁰.

Il linguaggio dei simboli è indubbiamente un punto di forza della matematica, è uno strumento che permette di indicare e nominare degli oggetti astratti, è supporto al ragionamento, è uno straordinario strumento di sintesi. Pensiamo ad esempio alla proprietà commutativa della moltiplicazione, in forma verbale si può esprimere così: 'il prodotto di due numeri è indipendente dall'ordine dei fattori', in forma simbolica diventa: ' $ab = ba$ ', cinque caratteri!

¹⁹ R. Feynman, *La legge fisica*, Boringhieri, Torino 1971, pp. 43-44.

²⁰ C. Herzenschmidt, *L'invenzione della scrittura*, Jacabook, Milano 1999, pp. 13-14

Proprio per queste sue caratteristiche il linguaggio simbolico deve essere 'maneggiato con cura', se rileggiamo quest'ultima espressione considerando solo quel che c'è scritto: ' $a b$ è uguale a $b a$ ' può sembrare che manchino le cose più importanti: che cosa sono a e b ? Qual è il loro significato? Che cosa si intende esprimere mettendo una lettera di fianco all'altra? L'uso di simboli presuppone delle conoscenze che vengono date per scontate, o meglio che sono prese in considerazione implicitamente: una scrittura simbolica come può essere ad esempio una formula ha bisogno, per essere compresa e utilizzata appieno, per essere usata come strumento di conoscenza, che sia chiaro il contesto in cui si sta operando, pensiamo ad esempio all'uso di una abbreviazione in un testo: si può usare se non fa sorgere ambiguità e se si è sicuri che il fruitore del testo può ricostruirne il senso. È necessario quindi che la formula sia letta alla luce degli elementi del contesto in cui è stata generata, l'apprendimento del livello simbolico è significativo e stabile se non taglia il legame con la radice dalla quale è nato. Un lavoro di questo tipo sui simboli è un ostacolo che non si può aggirare, a meno di esporre gli alunni a incomprensioni anche gravi piuttosto che ad un uso superficiale o scriteriato.

Non voglio con questo esempio limitare le considerazioni all'uso delle lettere: un posto particolare tra i simboli della matematica è sicuramente occupato dalle cifre del sistema decimale posizionale, uno delle invenzioni più sorprendenti dell'umanità²¹. La scrittura dei numeri in questa forma non è affatto una scrittura semplice e naturale, come può sembrare a chi la usa da anni, ed è importante ricordare la sua complessità. Consideriamo ad esempio 254. In essa riconosciamo la giustapposizione di tre simboli che, presi singolarmente, hanno loro un significato: 2, due, 5, cinque, 4 quattro. Il significato della scrittura dipende da tali significati, ma non si esaurisce in essi, come si sa il significato della scrittura in esame è duecentocinquantaquattro, una parola composta da tre termini, duecento-cinquanta-quattro, per ciascuno dei quali è disponibile nel sistema di numerazione una propria scrittura, 200, 50 e 4. Però tali scritture non si combinano per giustapposizione come nella parola corrispondente, ma danno vita ad una diversa scrittura simbolica, nella quale sono implicati una quantità sorprendente di concetti e operazioni: la posizione della cifra all'interno della scrittura del numero fa riferimento ad unità di diverso ordine, ciascuna delle quali è ottenuta dalla precedente per raggruppamento, la regola di raggruppamento è iterativa, dieci unità di un ordine considerate insieme come una singolarità costituiscono l'unità dell'ordine

²¹ Cfr. ad esempio A. Gorini, *Cifre segni e operazioni*, Emmequattro n. 39-40

successivo... Penso che si possa prendere il sistema di numerazione decimale posizionale come modello esemplare della ricchezza del linguaggio simbolico.

Come abbiamo già accennato, un'altra fonte di simboli matematici che i ragazzi incontrano nel primo ciclo scolastico sono le lettere, che vengono utilizzate come strumento di generalizzazione: la formulazione delle proprietà delle operazioni ne sono un esempio. L'introduzione delle lettere, ovvero l'incontro con un nuovo sistema simbolico diverso da quello numerico può produrre dei conflitti. Confrontiamo la scrittura precedente, 254 con la scrittura abc . In questo secondo caso abbiamo ancora la giustapposizione di tre simboli, le lettere a , b e c , che nell'accezione più comune hanno lo scopo di indicare genericamente tre numeri, quindi con un significato meno definito dei precedenti. La somiglianza della forma genera confusione quando i ragazzi incontrano la seconda scrittura, dopo che per anni hanno avuto a che fare con scritture del primo tipo. Tanto è vero che alla richiesta: "Scrivi il generico numero di tre cifre" molti rispondono proprio fornendo la scrittura abc .

Questo è un errore, assolutamente giustificabile, per far fronte al quale occorre ricondurre al senso della scrittura, ovvero bisogna sollecitare a leggere solo quel che c'è scritto: il significato della giustapposizione nella scrittura con le lettere è diverso da quello che si ha nella scrittura con le cifre, indica 'solo' l'operazione della moltiplicazione, pertanto abc significa 'il prodotto di tre numeri, non noti, che possono, ma non devono, essere tutti diversi tra loro'. È importante osservare che i ragazzi che fanno quest'errore stanno mettendo in campo una propria congettura, ovvero il significato della giustapposizione si mantiene quando si passa da una scrittura con le cifre a una scrittura con le lettere. Lavorare con loro a partire da questo, arrivare ad affermare che il generico numero di tre cifre si può scrivere nella forma

$a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$ dove a indica un numero compreso tra 1 e 9 mentre b , c sono numeri compresi tra 0 e 9

può essere un percorso lungo, ma è un'esperienza molto ricca.

Di fronte a certi compiti che correggiamo si può dire che i ragazzi non capiscono quel che leggono e non sanno quel che scrivono: si è consumata una frattura tra la scrittura e il significato. Da una parte il testo – ma anche la formula, la procedura, il calcolo – è muto, dall'altra si costruiscono frasi – in senso lato possiamo tra esse includere anche operazioni, espressioni formule – e anche veri e propri discorsi, senza che abbiano un senso, sia soggettivamente, per chi li formula, sia da un punto di vista assoluto.

A conferma di ciò citiamo il giudizio del prof Arzarello: «Vi sono errori che hanno un carattere di pervasività e di universalità tali da far pensare che affondino le loro radici nel profondo delle discipline e delle conoscenze degli alunni. Parleremo allora di ostacoli. [...] Molto si è scritto su ciascuno di questi ostacoli; io vorrei sottolineare un loro aspetto comune che affonda le radici nel modo in cui insegnanti e alunni intendono l'uso del linguaggio formale in matematica. [...] C'è un unico filone di pensiero dietro a tutto questo: **la separazione crescente e totale tra i segni usati in matematica e i loro significati**. Ciò porta a rigidità incredibili e a una mancanza di flessibilità del pensiero: gli alunni separano nettamente le proprie capacità di ragionamento dai formalismi e dai meccanismi che invece sarebbero dettate da qualche crudele divinità che si proporrebbe sistematicamente di non far capire nulla»²².

Sicuramente è arduo identificare l'origine di tutte le difficoltà che i nostri allievi incontrano nella matematica, e non solo le difficoltà, ma anche le incomprensioni, che insieme ad esse possono portare alla disaffezione e fino al blocco che può precluderne l'apprendimento: di fronte a un bambino o un ragazzo che non impara nasce nell'insegnante l'esigenza di trovare una via per rimetterlo sulla strada. Un aiuto può arrivare dalla prof. Manara che scrive in *La matematica e la realtà*:

«Tutti i tipi di difficoltà (...) si possono ricondurre a una radice profonda, vera origine di tanti ostacoli nell'apprendimento della matematica: l'atteggiamento di distacco dal senso, di chi si rassegna ad eseguire acriticamente operazioni ripetitive e inconsapevoli. Esso porta a confondere la capacità intellettuale, la comprensione concettuale con l'abilità di manipolazione: so fare, non importa il che cosa e il perché. Vorremmo che ci si convincesse che questo atteggiamento è antitetico alla natura e allo scopo della matematica. Nell'apprendimento matematico il vero ostacolo non è fare errori di calcolo, non è l'intoppo operativo: ciò che veramente impedisce lo sviluppo del pensiero matematico è l'azione inconsapevole»²³.

In altre parole è importante ricondurre l'alunno in un territorio a lui più familiare proponendo situazioni, esercizi, problemi, attività che per lui hanno senso, nell'accezioni più ampia e completa del termine, che siano anche dentro all'orizzonte di ciò per lui può essere degno di interesse, per permettergli di completare, affinare, formalizzare la scoperta, la

²² F. Arzarello, *Il ruolo dell'errore nell'apprendimento* in *Le difficoltà nell'apprendimento della matematica*, A. Contardi-B. Piochi (a cura di), Erickson, Trento 2002

²³ R. Manara, *La matematica e la realtà*, Marietti 1820, Genova 2002, p. 126

reinvenzione del concetto, il significato della notazione, lo scopo della procedura che gli manca. Solo in questo modo anche per lui è possibile rivivere l'esperienza di Florenskij: «Io devo vedere la profondità delle cose, anche di quelle più consuete, invece di leggere etichette incollate sulle cose, con l'indicazione che esse sono straordinarie»²⁴.

²⁴ P. Florenskij, *Non dimenticatemi*, Mondadori, Milano 2000, p. 175

Bibliografia

- F. Arzarello, Il ruolo dell'errore nell'apprendimento in Le difficoltà nell'apprendimento della matematica, A. Contardi-B. Piochi (a cura di), Erickson, Trento 2002
- M. Bramanti, I linguaggi matematici: idee e simboli, Emmequattro 42,43
- P. Longo, L'esperienza nella formazione del pensiero matematico, Emmequattro, 45
- H. Freudenthal, Ripensando l'educazione matematica, La Scuola, Brescia 1994
- P. Florenskij, Non dimenticatemi, Mondadori
- P. Florenskij, Lectio e lezione, La nuova Europa
- A. Gorini, Matematica a sorpresa, manuale per la scuola secondaria di primo grado, Principato
- A. Gorini, Cifre segni e operazioni, Emmequattro, 39-40
- C. Herrenschmidt, L'invenzione della scrittura visibile e invisibile in Iran, Israele e Grecia, Jacabook, Milano 1999
- M. Impedovo, A. Orlandoni, D. Paola, Quaderni SNV 1 – MAT a.s. 2010-2011, Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica – Classe seconda – Scuola secondaria di II grado
- R. Manara, La matematica e la realtà, Marietti 1820